FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ ústav matematiky

Internetová matematická olympiáda

10. ročník

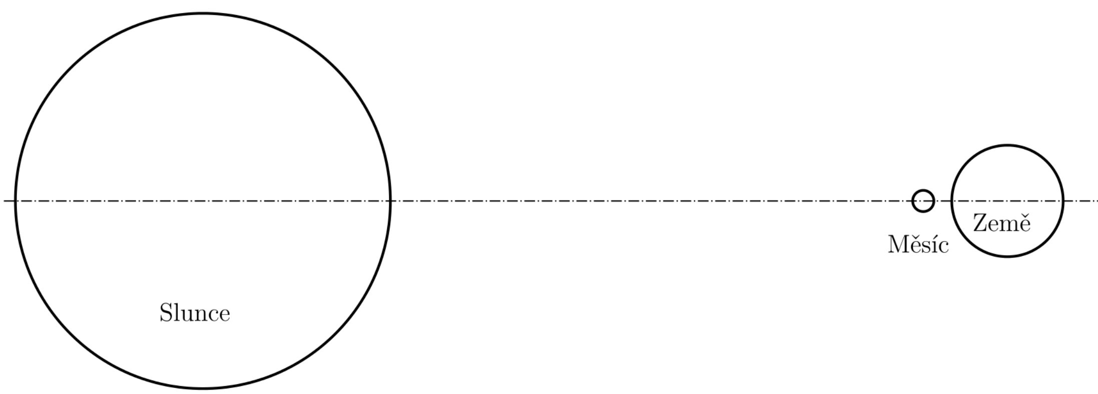
http://matholymp.fme.vutbr.cz

Zadání úloh:

1. Letadlo letí z Brna do Londýna. Určete délku trajektorie letadla za předpokladu, že se pohybuje od začátku do konce v letové hladině 10 km po ortodromě (tedy neuvažujeme žádné stoupání při startu ani klesání při přistání ani během letu). Poloměr Země nechť je 6371 km a souřadnice města Brna nechť jsou $49°13'25''$ s. š., $16°34'39''$ v. d. a Londýna $51°30'2''$ s. š., $0°7'28''$ z. d. Uveďte postup řešení (přičemž je dovoleno a doporučeno použít vzorec pro výpočet středového úhlu ortodromy přímo z internetu) a výsledek uveďte v kilometrech.

2. Pro jaká $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ nabývá výraz $\dfrac{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \ldots \cdot \log n}{10^n}$ nejmenší hodnoty?

3. Uvažujme Slunce, Měsíc a Zemi v takové pozici, aby na Zemi bylo pozorovatelné úplné zatmění Slunce, viz rovinný schématický náčrtek na Obrázku 1. Určete graficky, která část roviny leží ve stínu Měsíce, uvažujeme-li rovinnou situaci, kde je dána kružnice $s(S = [0,0]; R_s = 4$ cm$)$ demonstrující Slunce a kružnice $m(M = [10,0]; R_m = 1$ cm$)$ demonstrující Měsíc. Načrtněte řešení, zapište postup konstrukce, řešení narýsujte a plochu stínu vybarvěte.



Obrázek 1: Schématický náčrtek pozice Slunce, Měsíce a Země při úplném zatmění Slunce

4. Mějme přímku $a : y = -\frac{1}{2}x$ a přímky $b : y = mx$ a $c : y = nx$, kde $m, n \in \mathbb{R}$. Uvažujme přímku b', která je rovnoběžná s přímkou b a je vzhledem k přímkce b posunutá o 7 jednotek v kladném směru osy x a přímku c', která je rovnoběžná s přímkou c a je vzhledem k přímce c posunutá o 5 jednotek v kladném směru osy y. Víme, že se přímky a, b', c' protínají v právě jednom bodě.

   a) Nechť $m = 3$. Určete rovnici přímky c ve směrnicovém tvaru.

   b) V závislosti na parametru m určete rovnici přímky c ve směrnicovém tvaru.

5. Na milimetrovém papíru je narýsován obdélník o stranách 272×204 mm, jehož strany leží na přímkách vyznačených na milimetrovém papíru. Sestrojíme úhlopříčku obdélníka a určíme všechny uzly milimetrové sítě na papíru, které leží přesně na této úhlopříčce. Na kolik částí je úhlopříčka těmito uzly rozdělena?

6. Uvažujme funkci danou vztahem $f(z) = z\sqrt{1 - \dfrac{1}{z}}$. Určete množinu, na kterou tato funkce zobrazí množinu $M = \{z \in \mathbb{C} : z = t + 0 \cdot \mathrm{i},\ \text{kde}\ \ 0 < t < 1\}$.

   Poznámka: Komplexní číslo $z = a + b\mathrm{i}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ lze pomocí Eulerovy formule $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ zapsat ve tvaru $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, kde číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se nazývá modul a φ se nazývá argument (nebo také úhel) komplexního čísla z. Reálná mocnina komplexního čísla z je definována jako $z^r = \mathrm{e}^{r(\ln|z| + \mathrm{i}\varphi)}$, kde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$.

7. Dokažte, že funkce $f(x) = -\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} x\right)\right|$ a $g(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|$ jsou si rovny.

   Poznámka: Funkce vznikly dvěma různými postupy užitými při integraci funkce $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$. V prvním případě byla použita substituce $x = \operatorname{cotg} t$ a v druhém případě substituce $\sqrt{1 + x^2} = t - x$. Ale ani integrace, ani použitá substituce nemá na princip řešení úlohy zásadní vliv.

8. Vybereme náhodně tři reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Jaká je pravděpodobnost, že součet druhých mocnin těchto čísel bude menší nebo roven 1?

9. Pro jakou hodnotu koeficientu a mají mnohočleny $x^4 + ax^2 + 1$ a $x^3 + ax + 1$ stejný kořen? Zdůvodněte.

10. Je dána funkce $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Zapište tuto funkci jako součet sudé funkce a liché funkce a o těchto funkcích dokažte, že jde skutečně o funkci sudou a funkci lichou.
