

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXVIII. ročník
2021/2022

Milá studentko, milý studente,

právě se Ti do rukou dostala brožurka BRněnského KOrespondenčního Semináře BRKOS, který je organizován pod záštitou Ústavu matematiky a statistiky Masarykovy univerzity v Brně.

Pokud Tě baví matematika, Brkos je skvělou příležitostí, jak se v tomto oboru dál rozvíjet i nad rámec výuky na střední škole. Kromě toho také nejlepší řešitelé semináře mohou získat hodnotné ceny a možnost zúčastnit se dvou týdenních matematických soustředění, která se budou konat přibližně v únoru (předpokládaný termín je 6. – 11. 2. 2022) a na přelomu srpna a září 2022. Na následujících stránkách brožurky můžeš najít informace o tom, jak celý seminář funguje, spolu se zadáním úloh 1. série. Tak neváhej, popadni tužku a papír a pusť se do řešení!

Zdraví Tě a na Tvoje zasláná řešení se těší

*Dalibor, Danča, David, Hanka, 2 × Honza, 2 × Kačka,
Kuba, Martin, Terka, 2 × Tom, Vítek a Vojta*

ÚVODNÍ INFORMACE

Co je Brkos zač?

BRKOS je matematický korespondenční seminář určený pro všechny středoškoláky, kteří mají rádi matematiku a řešení netradičních problémů.

Jak Brkos probíhá?

Příklady zveřejňujeme postupně v takzvaných sériích. V průběhu školního roku vyjde celkem 5 sérií po 8 úlohách z různých oblastí matematiky. První čtveřice úloh značená čísly 1–4 se váže k tématu série (kromě úloh v 1. sérii). Druhá čtveřice úloh značená písmeny A–D je pak netematická a váže se k náhodným oblastem matematiky. Obtížnost úloh roste s jejich pořadím v rámci každé čtveřice, což znamená, že nejjednodušší jsou vždy úlohy 1 a A a nejobtížnější úlohy 4 a D. Pokud si tedy například nevíš rady s úlohou 3, nevzdávej to a mrkni se také na úlohy A, B apod.

Součástí zadání je i příběh psaný kurzívou, který ovšem není nutné pro vyřešení úloh číst.

Řešitelé rozhodně nemusí spočítat všechno. I vyřešení jednoho příkladu se vyplatí. Náš bodovací systém totiž zvýhodňuje ty, kdo řeší v průběhu celého roku, oproti těm, kdo vyřeší velké množství příkladů najednou v jedné sérii. Dále jsou zvýhodněni mladší řešitelé, takže se nemusíš bát zúčastnit, i když jsi teprve v prváku, nebo dokonce na základce. Samozřejmě vítáme i nové starší řešitele, nikdy není pozdě na to začít řešit. :)

Řešení odevzdaná elektronicky opravíme, obodujeme a spolu se stručnou zpětnou vazbou pošleme zpět na Tvoji emailovou adresu.

Registrace a odesílání řešení

Pro zapojení se do semináře je nutná registrace na našich webových stránkách (<http://brkos.math.muni.cz/>).

Po registraci pak můžeš elektronicky odevzdat svá řešení přes tzv. Submitovátka, které najdeš na [našich webových stránkách](#) po přihlášení ke svému účtu. Soubory prosím odevzdávej ve formátu PDF. Pokud řešení scanuješ nebo fotíš, dělej to tak, aby byl výsledek co nejkontrastnější (bílé pozadí, tmavý text).

Silně také doporučujeme naučit se pracovat s typografickým systémem TeX, pomocí kterého je možné tvořit elegantní a úhledné (nejen matematické) texty. Jeho znalost v budoucnu rozhodně využiješ, ať už budeš potřebovat vysázet odborný článek, bakalářskou práci či zápis šachové partie.

Hodnocení

Úkolem řešitelů je samozřejmě vyřešit zadané příklady. Za samotný správný výsledek se ale uděluje jen část bodů. To hlavní, co se boduje, je postup řešení a srozumitelnost úvah (stejně jako například v matematické olympiádě). Proto Ti moc nepomůže, když si řešení naprogramuješ. Všechny příklady jsou řešitelné jen s pomocí tužky a papíru.

Jednotlivé příklady jsou různě obtížné a jsou proto oceňovány různým počtem bodů. Za každý příklad může řešitel získat 0 – 5 bodů podle náročnosti dané úlohy a správnosti odevzdaného řešení. V každé tematické a netematické čtveřici jsou úlohy seřazeny podle obtížnosti a v tomto pořadí je možné za ně získat až 3, 3, 4 a 5 bodů.

Navíc se do výsledného součtu bodů bude počítat pouze 6 nejlépe vyřešených úloh. Maximální počet bodů za 1 sérii tak není 30, ale 24.

Vzorec pro přepočítání bodů pro mladší řešitele a jeho vysvětlení můžeš najít na našich webových stránkách v sekci [Úvodní informace](#).

Odměna pro úspěšné řešitele

Pro nejlepší řešitele prvních dvou sérií pořádáme zimní soustředění (předpokládaný termín je 6. – 11. 2. 2022). Nejlepší řešitelé celého semináře pak mají možnost jet na letní soustředění – týden plný her, zábavy a také matematiky. Navíc zde můžeš poznat spoustu fajn lidí s podobnými zájmy. Soustředění je z většiny hrazeno Masarykovou univerzitou a MŠMT. Na letním soustředění obdrží nejlepší řešitelé diplomy a hodnotné ceny podle umístění v semináři (deskové hry, knihy, outdoorové vybavení a další).

Uchazeče o studium matematických bakalářských oborů na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity by mohlo zaujmout, že díky úspěšnému řešitelství semináře v předmaturnitních ročnících jim může být prominuta přijímací zkouška. Podmínkou úspěšného řešitelství je získání alespoň poloviny maximálního počtu bodů za celý ročník. O potvrzení o úspěšném řešitelství je možné si napsat na náš mail brkos@math.muni.cz alespoň 3 dny před odesláním žádosti o prominutí přijímacích zkoušek (tedy obvykle do 25. února včetně).

Jak nás kontaktovat

Pro komunikaci s řešiteli, dotazy, připomínky k úlohám a jiné nápady můžeš použít sekci [Diskuze](#) na webu semináře. Další možnou komunikační cestou je naše mailová adresa brkos@math.muni.cz, v případě potřeby můžeš napsat i na adresu konkrétního organizátora zveřejněnou na webu v sekci [Organizátoři](#). Nezapomeň se také přidat do naší skupiny na [Facebooku](#).

Mathrace

Kromě pěti sérií, které řeší každý sám za sebe, pořádáme každý rok na podzim online týmovou soutěž MathRace pro dvou- až čtyřčlenné týmy. Kromě velké várky vypečených úloh se můžeš těšit i na hodnotné ceny! Letošní ročník MathRace připadá na středu 1. 12. 2021.

Na závěr

Přejeme Ti hodně štěstí a zábavy při řešení BRKOSích úloh.

Tvůj BRKOS Team

Zadání 1. série

ÚVODNÍ SALÁT

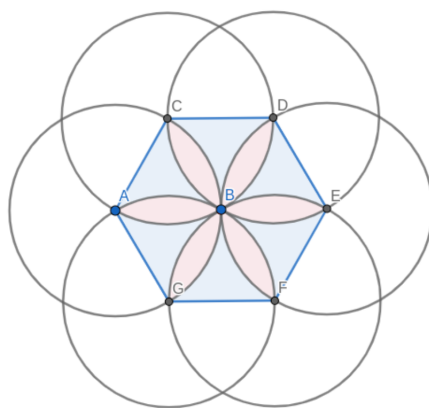
Termín odeslání: 18. 10. 2021

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách <http://brkos.math.muni.cz/>.

Salát je velmi univerzálním pokrmem. Může sloužit jako hlavní chod, předkrm nebo jako příloha. Velmi často je salát spojován s čerstvou zeleninou. Už základní slovo salát může přeci jen označovat konkrétní druh zeleniny! Přesto existuje nespočet druhů a typů salátů, z nichž některé zeleninu nemusí obsahovat vůbec. V dnešním díle naší kulinařské show si ukážeme, jak připravit pokrm, jehož název je podobný oblíbenému salátu coleslaw. Nenechte se ovšem zmást, dnes se zaměříme na to, jak udělat správný brkoslaw.

Na přípravu salátu brkoslaw je potřeba několik důležitých ingrediencí. Jeho nejdůležitější složkou jsou především dobré bylinky. Ty totiž ke kuchyni a vaření patří odjakživa. Stačí trocha té správné a pokrm dostane hned úplně jiný rozměr. Do brkoslawu je ovšem třeba dát bylinky s geometricky přesnými květy. Ty vypadají takto:

ÚLOHA 1.1. Je dán pravidelný šestiúhelník a šest kružnic o poloměru 1, každá se středem v jiném vrcholu a procházející středem šestiúhelníku. Jaký je obsah růžové květiny na obrázku?



Bylinky je nejlepší nasbírat za úplňku a nechat je usušit. Než se bylinky usuší, je vhodné se podívat na nějaký hezký geometrický příklad. Sušení potom probíhá rychleji a z bylinek se uvolní silnější aroma.

ÚLOHA 1.2. Nechť je dána kružnice k a body A a B , které na ní leží. Tečny ke kružnici k rovnoběžné s AB se dotýkají kružnice v bodech C a D . Zvolme body E a F , tak, že C je střed úsečky AE a D je střed úsečky BF . Dokažte, že AF je rovnoběžná s BE .

Důležitou složkou salátu jsou, kromě základních ingrediencí, zálivky a dresingy. Jak už název napovídá, zálivka je přeliv, který zvýrazňuje chuť salátu. Dressing je naopak chuťově

doplňující, proto bývá častěji hustější a připomíná omáčku. A stejně jako sýry patří k Francii a čokoláda ke Švýcarsku, dresingy jsou neodmyslitelně spjaté s Brkolandií. Ta totiž patří mezi největší vývozců dresingů po celém světě. Metropolí dresingu je potom hlavní město Brkolandie Hloupětín.

ÚLOHA 1.3. V Hloupětíně postavili mrakodrap o n patrech, kde každé patro mělo 1 až n oken. Podmínka byla, aby pro každá dvě patra mělo to vyšší z nich alespoň tolik oken jako to nižší z nich. Dokažte, že existuje patro m s m okny (čili má přesně tolik oken, kolikáté je v pořadí odspodu).

Kromě bylinek a dresingu dávají brkoslawu jedinečnou chuť také semínka. Do každé porce salátu nasypeme n semínek.

ÚLOHA 1.4. Mějme n různých černých bodů v rovině, pro které platí, že žádné tři neleží na jedné přímce. Tyto body můžeme přemísťovat, a to jediným způsobem: vyznačíme kdekoli v rovině červený bod, kolem kterého otočíme černý bod o libovolný úhel. Dva body budeme považovat za různé, jestliže nemají stejnou polohu v prostoru, proto pokud bychom například přemístili jeden černý bod přímo na druhý, pak splynou a stane se z nich jeden jediný.

Určete nejmenší počet různých červených bodů (v závislosti na n) nutných k tomu, aby bylo zaručeno, že všechny černé body splynou v jeden.

Již jsme si řekli, jak důležité jsou pro přípravu brkoslawu bylinky. Je ovšem třeba si dát dobrý pozor na to, aby mezi nimi nebyl žádný třináctilístek. Ten totiž může působit neštěstí či se projevovat projímavými účinky.

ÚLOHA 1.A. Biolog Pandula se rozhodl, že vymytí ze světa neštěstí tím, že vyrobí třináctilístek. Začal sbírat trojlístky po světě a navzájem je křížit a získávat tak nové n -lístky. Zjistil, že pravidla pro křížení k -lístku a l -lístku (kde $k \leq l$) jsou následující:

1. pokud k i l jsou prvočísla, tak získá $(l + 1)$ -lístek,
2. pokud jedno je prvočísla a druhé není, tak získá $\frac{k+l}{2}$ -lístek (pokud by výsledek nebyl celé číslo, tak zaokrouhlíme nahoru),
3. pokud jsou k i l složená, tak získá $2l$ -lístek.

Může Pandula někdy získat kýžený 13-lístek?

Základem zeleninového salátu je zelenina krájená na menší kousky. K nakrájení zeleniny budeme potřebovat: zeleninu, prkénko, nůž a pravítko. Pravítkem odměřujeme hezké trojúhelníky, které následně umístíme do větší mísy a pečlivě promícháme.

ÚLOHA 1.B. Nechť ABC je libovolný trojúhelník. Označme S střed strany AB a P_C patu výšky spuštěnou z bodu C na stranu AB . Dokažte, že platí $||AC|^2 - |BC|^2| = 2|AB||SP_C|$.

Salát necháme uležet v lednici do dalšího dne a v mezičase se můžeme v klidu věnovat dalšímu matematickému příkladu.

ÚLOHA 1.C. Kružín a Zrcadlín hrají v rovině následující hru: Střídají se v tazích s tím, že Kružín začíná a každý udělá právě 2021 tahů. Kružín ve svém tahu umístí do roviny kruh o poloměru 1. Zrcadlín umístí přímkou a celou rovinu (všechny útvary, které se v rovině objevily před umístěním) zobrazí v osově souměrnosti podle této přímky. Kružínův cíl je, aby na konci v rovině bylo co nejvíce útvarů. Útvary, které splynou (protože jsou zobrazeny na sebe navzájem nebo protože jsou umístěny tam, kde už nějaký útvar je) se počítají jako jeden. Kolik nejméně může na konci hry v rovině být útvarů, pokud Kružín hraje nejlépe, jak to jde?

V závěru přípravy brkoslawu už jen stačí dokázat, že:

ÚLOHA 1.D. Dokažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned}a + b &= c + d \\ a^3 + b^3 &= c^3 + d^3 + K\end{aligned}$$

má celočíselné řešení právě tehdy, když K je celočíselný násobek čísla 6.

Brkoslaw můžeme dochutit špetkou Fermatovy věty, citronovou šťávou, grupami, dokonalými čísly, pepřem a solí.

Dobrou chuť!

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<http://brkos.math.muni.cz/>