Olomoucký informatický korespondenční seminář – Olinx

# Teorie her – 1. díl

Jan Konečný

olinx.inf.upol.cz

Tento seriál poskytuje čtenáři základy dnes již mohutně propracované disciplíny aplikované matematiky – teorie her. V tomto díle se seznámíme s jednoduchým typem her, konkrétně s hrami v normálním tvaru, a základními koncepty jejich řešení.

## 1 Co je a není teorie her

Teorie her nepoužívá slovo hra v takovém smyslu, v jakém ho většina z nás používá v běžném životě. A obzvláště nejde o počítačové hry.[1] Hrou v teorii her rozumíme abstraktní model, který nám umožňuje porozumět situacím, ve kterých se racionální aktéři (lidé, firmy, organizace, vlády, etnické skupiny, atd.) dostávají do střetu zájmů. Výsledky teorie her je možno využít k hledání nejvhodnější strategie v dané situaci nebo k vytváření takových situací (aukce, volební systémy, síťové protokoly, zákony, smlouvy, atd.), aby v nich aktéři jednali podle našich představ. To má uplatnění v ekonomii, informatice, politologii, psychologii a mnoha dalších disciplínách, které spojuje zájem o to, jak se budou racionální aktéři chovat ve strategických interakcích. Například na konci tohoto dílu jsou uvedeny příklady z oblasti ekonomie a plánování dopravních sítí, v příštím díle budou mimo jiných také příklady z oblasti sportu.

Teorie her staví na dvou základních předpokladech: prvním z nich je *sebestřednost* aktérů. Každý aktér se snaží maximalizovat svůj zisk a to bez ohledu na zisk ostatních aktérů. Protože se o maximalizaci svého zisku snaží všichni aktéři a jednání ostatních aktérů ovlivňuje zisk všech hráčů, hovoříme o konfliktních situacích. Druhým předpokladem v teorii her je *strategické uvažování* aktérů – aktéři berou v úvahu znalosti o ostatních aktérech nebo předpoklady o jednání ostatních aktérů.

Začněme klasickým příkladem:

*Příklad* 1 (Odhadni 2/3 průměru). Představme si, že jsme jeden z účastníků v následující soutěži. Každý soutěžící má zvolit přirozené číslo od 1 do 100, včetně. Výhru dostane ten soutěžící, jehož číslo bude nejblíže dvěma třetinám průměru všech čísel, které soutěžící volili. Při remíze si výhru rozdělí ti soutěžící, kteří byli nejblíže.

**Jaké číslo bychom měli volit, abychom vyhráli my? Zkuste teď zvolit nějaké číslo.** Vzápětí se na tuto situaci podíváme skrze jednoduché principy teorie her.

Máme tedy na výběr sto možných akcí – voleb jednoho z čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$.

Označme dvě třetiny průměru všech zvolených čísel $\frac{2}{3}\mu$. Všimněme si, že nejvyšší hodnota, které $\frac{2}{3}\mu$ může nabýt, je $66{,}\overline{6}$; to v případě, že všichni soutěžící budou volit číslo 100. Nemá tedy pro nás smysl volit žádné číslo, které je vyšší než 67, protože číslo 67 bude vždy blíže $\frac{2}{3}\mu$ než jakékoli vyšší číslo. Můžeme tedy omezit naši množinu možných akcí na množinu $\{1, 2, \dots, 67\}$.

[1] Ovšem některé principy teorie her lze využít v programování umělé inteligence v počítačových hrách.

Musíme ale počítat s tím, že ostatní soutěžící jsou také racionální, a že také vyloučí čísla vyšší než 67. Pokud všichni budou volit nejvýše číslo 67, může $\frac{2}{3}\mu$ nabýt nejvýše hodnoty $44{,}\overline{6}$. Nemá tedy smysl volit čísla vyšší než 45. Omezíme tedy naši množinu možných akcí na množinu $\{1, 2, \dots, 45\}$.

A protože ostatní soutěžící jsou též racionální, omezíme stejně i jejich množiny akcí. Dalšími kroky tohoto procesu se dostaneme až do stavu, kdy všichni soutěžící mají jen jednu možnou akci – volit číslo jedna. Toto je tedy číslo, které by měli volit všichni soutěžící, včetně nás.

**Shoduje se tento závěr s Vaším zvoleným číslem?**

Postup, kterým jsme analyzovali soutěž Odhadni 2/3 průměru, se nazývá postupná eliminace dominovaných strategií a je to jeden z konceptů řešení her představených v tomto díle seriálu.

## 2 Hry v normálním tvaru

V základě existují dvě standardní reprezentace her. První z nich je známá jako *normální tvar* (též *strategický tvar*). Jde o velmi jednoduchou, ale silnou reprezentaci hry. Uvažuje se v ní, že všichni hráči jednají současně, nezávisle na sobě. Druhá reprezentace se nazývá *rozšířený tvar*, a ta zahrnuje jasně pořadí, ve kterém hráči jednají.

Například ve známé hře kámen-nůžky-papír hráči jednají současně a rozhodují se bez znalosti toho, co udělá druhý hráč. Tuto hru bychom modelovali jako hru v normálním tvaru. Naopak ve hře v šachy hraje jako první bílý hráč. Poté, co odehraje svůj tah bílý hráč, hraje černý hráč. Ten se rozhoduje také podle toho, jak hrál bílý hráč. Poté je opět na tahu bílý hráč, atd. V tomto případě je vhodnější rozšířený tvar.

V tomto seriálu začneme hrami v normálním tvaru; rozšířenému tvaru a vztahu mezi normálním a rozšířeným tvarem se budeme věnovat až ve čtvrtém díle.

Hra v normálním tvaru má následující složky:

- Konečná *množina hráčů*; hráče budeme označovat přirozenými čísly, jejich počet budeme značit $I$, celou množinu pak budeme značit $\mathcal{I}$. Tedy $\mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$. Libovolného hráče pak budeme značit písmenem $i$.
- *Množinu $S_i$ akcí*, které může volit hráč $i$. Ta je potřeba pro každého hráče $i \in \mathcal{I}$. Libovolnou akci hráče $i$ budeme značit $s_i$.
- *výplatní funkce* $u_i$ hráče $i \in \mathcal{I}$, která každé kombinaci akcí hráčů přiřadí reálné číslo, které představuje zisk/výplatu hráče $i$. Ta je potřeba pro každého hráče $i \in \mathcal{I}$.

Trojici $\langle \mathcal{I}, (S_i)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}} \rangle$ obsahující všechny ty tři složky pak nazýváme hrou v normálním tvaru.

*Příklad* 2 (Vězňovo dilema). Dva spolupracující zločinci jsou zatčeni a umístěni do oddělených cel. Pokud se oba přiznají, budou oba potrestáni třemi roky vězení. Pokud budou oba zapírat, nebude jim prokázána vina v plné výši a budou oba potrestáni jen jedním rokem vězení. A pokud se jeden přizná a druhý bude zapírat, přiznávající se bude propuštěn na svobodu a zapírající bude potrestán čtyřmi roky vězení. Každý z vězňů chce strávit ve vězení co nejmenší počet let; nejlépe být rovnou propuštěn na svobodu.

Hráči v této hře jsou tedy dva vězni $\mathcal{I} = \{1, 2\}$; každý z nich může volit jednu ze dvou akcí: „přiznat” a „zapírat”; tedy

$$S_1 = \{\text{přiznat}, \text{zapírat}\}, \qquad S_2 = \{\text{přiznat}, \text{zapírat}\}.$$

Za výplaty v této hře budeme považovat opačné hodnoty počtu let strávených ve vězení:

$$\begin{aligned} u_1(\text{přiznat}, \text{přiznat}) &= -3 & u_2(\text{přiznat}, \text{přiznat}) &= -3\\ u_1(\text{přiznat}, \text{zapírat}) &= \phantom{-}0 & u_2(\text{přiznat}, \text{zapírat}) &= -4\\ u_1(\text{zapírat}, \text{přiznat}) &= -4 & u_2(\text{zapírat}, \text{přiznat}) &= \phantom{-}0\\ u_1(\text{zapírat}, \text{zapírat}) &= -1 & u_2(\text{zapírat}, \text{zapírat}) &= -1. \end{aligned}$$

Vězňovo dilema modelované jako hra v normálním tvaru je pak trojice

$$\langle \{1, 2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2) \rangle .$$

V případě her se dvěma hráči, kde počet akcí každého z nich je malý, je zvykem zapisovat výplatní funkce jako tabulku, nazývanou *výplatní matice*. Řádky ve výplatní matici představují akce prvního hráče a sloupce představují akce druhého hráče. Elementy výplatní matice jsou dvojice čísel – výplaty prvního a druhého hráče, když první hráč zvolí akci odpovídající řádku a druhý hráč zvolí akci odpovídající sloupci. V tomto seriálu pro přehlednost budeme v hrách o dvou hráčích jednotlivé hráče odlišovat barevně; modrá bude označovat prvního hráče a červená bude označovat druhého hráče, tak jak jsme to už udělali v příkladu 2.

*Příklad* 3 (Výplatní matice ve Vězňově dilematu). Výplatní matice odpovídající výplatním funkcím $u_1$ a $u_2$ z příkladu 2 je zobrazena níže.

| | | vězeň 2 | |
|---|---|---|---|
| | | přiznat | zapírat |
| vězeň 1 | přiznat | $-3, -3$ | $0, -4$ |
| | zapírat | $-4, 0$ | $-1, -1$ |

Nyní tedy víme, co se rozumí hrami v normálním tvaru a můžeme se věnovat jejich řešením. Ještě předtím ale potřebujeme zavést dva důležité pojmy a jejich značení, které budeme v popisech konceptů řešení používat.

Prvním pojmem je strategie. *Strategie* v teorii her je úplný popis toho, jak hrát hru. Pokud bychom například chtěli hraním hry pověřit „počítač” (tedy stroj bez jakékoli vlastní iniciativy), musíme mu sdělit, co dělat v jakékoli situaci, která by ve hře mohla nastat. V tomto dílu budeme ztotožňovat strategie s akcemi ve hře v normálním tvaru a budeme je stejně značit; tedy strategie hráče $i$ bude označována $s_i$ a množina všech jeho strategií bude označována $S_i$. Takové strategie se nazývají *ryzí strategie*. Protože v tomto dílu uvažujeme jenom ryzí strategie budeme přívlastek “ryzí” běžně vynechávat. Už příště si ale představíme smíšené strategie a začneme tyto pojmy rozlišovat.

Druhým pojmem je pojem profil strategií. *Profil strategií* je přiřazení, které hráčům přiřazuje jejich strategii. Budeme pracovat se dvěma druhy profilů. S úplnými profily, které přiřazují strategii každému hráči. Ty můžeme považovat za uspořádané $I$-tice $(s_1, s_2, \ldots, s_I)$, ve kterých je na $i$-té pozici strategie z $S_i$. Množinu všech úplných profilů značíme $S$. Formálně je tedy $S$ kartézský součin

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_I .$$

Dále budeme pracovat s neúplnými profily, které přiřazují akci všem hráčům vyjma jednoho. Tyto profily budeme značit $s_{-i}$, kde $i$ je hráč, který nemá přiřazenou strategii. Množinu všech takových profilů budeme značit $S_{-i}$. Opět můžeme uvažovat, že $s_{-i}$ jsou prvky kartézského součinu

$$S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_I .$$

Všimněme si, že pokud máme jen dva hráče, platí $S_{-1} = S_2$ a $S_{-2} = S_1$.

Ze strategie $s_i \in S_i$ a neúplného profilu strategií $s_{-i} \in S_{-i}$ můžeme vytvořit úplný profil strategií $(s_i, s_{-i}) \in S$.

Výplatní funkce $u_i$ tedy přiřazují reálné číslo každému profilu $s \in S$.

## 3 Dominantní a dominované strategie

Podívejme se nyní blíže na Vězňovo dilema. Jelikož jsou hráči v symetrické situaci, stačí prozkoumat strategie jednoho hráče. Všimněme si, že:

- Pokud vězeň 2 bude volit akci přiznat, dostane vězeň 1 výplatu $-3$, když bude volit akci přiznat, a výplatu $-4$, když bude volit akci zapírat. Pro vězně 1 je tedy lepší volit akci přiznat.
- Pokud vězeň 2 bude volit akci zapírat, dostane vězeň 1 výplatu $0$, když bude volit akci přiznat, a výplatu $-1$, když bude volit akci zapírat. Pro vězně 1 je tedy opět lepší volit akci přiznat.

Tedy bez ohledu na to, jak jedná vězeň 2, je pro vězně 1 výhodnější volit akci přiznat. Říkáme, že strategie přiznat je dominantní. Obecně, akce je dominantní, pokud zajišťuje nejvyšší výplatu bez ohledu na akce ostatních hráčů. Formálně, strategii $s_i \in S_i$ hráče $i \in \mathcal{I}$ nazveme *dominantní*, pokud platí $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ pro všechny $s'_i \in S_i$ a všechny $s_{-i} \in S_{-i}$.

Profil strategií $s^* = (s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_I) \in S$, ve kterém pro každého hráče $i \in \mathcal{I}$, platí že $s^*_i$ je dominantní strategie, se nazývá *rovnováha v dominantních strategiích*.

Vězňovo dilema je vzorový příklad, kde racionální jednání ve vlastním zájmu nevede ke společnému optimálnímu řešení. Všimněme si, že pokud oba hráči budou volit svou dominantní strategii, tedy profil akcí $(\text{přiznat}, \text{přiznat})$ dostane každý z nich výplatu $-3$, což je horší než kdyby volili profil akcí $(\text{zapírat}, \text{zapírat})$, který ale není rovnováhou v dominantních strategiích.

Uvedeme opačný pojem:

**Definice 1** (Silně dominovaná strategie)**.** Strategie $s_i \in S_i$ je *silně dominovaná*, pokud existuje strategie $s'_i \in S_i$, která vždy zajišťuje vyšší výplatu. Tedy platí

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \text{pro všechny } s_{-i} \in S_{-i}.$$

**Definice 2** (Slabě dominovaná strategie)**.** Strategie $s_i \in S_i$ is *slabě dominovaná*, pokud existuje strategie $s'_i \in S_i$, která vždy zajišťuje stejnou nebo vyšší výplatu a alespoň v jednom případě zajišťuje ostře vyšší výplatu. Tedy platí

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \text{pro všechna } s_{-i} \in S_{-i}$$

a

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \text{pro nějaké } s_{-i} \in S_{-i}.$$

Ve Vězňově dilematu u obou hráčů strategie „přiznat" silně dominuje strategii „zapírat". Racionální hráč by nikdy neměl hrát dominovanou strategii, protože má vždy možnost vybrat lepší – tu která ji dominuje.

## 4 Eliminace dominovaných strategií

Vězňovo dilema rozšíříme tak, že oba vězni budou mít kromě akcí „přiznat" a „zapírat" navíc akci „sebevražda". Pokud vězeň provede tuto akci, dostane nejhorší výplatu (řekněme $-10$) bez ohledu na akci druhého vězně. Druhý vězeň, pokud se přiznal, dostane mírnější trest 2 roky, a pokud zapíral je propuštěn na svobodu. Takto rozšíříme výplatní funkci, viz matici výplat níže.

| vězeň 1 \ vězeň 2 | přiznat | zapírat | sebevražda |
|---|---|---|---|
| přiznat | $-3, -3$ | $0, -4$ | $-2, -10$ |
| zapírat | $-4, 0$ | $-1, -1$ | $0, -10$ |
| sebevražda | $-10, -2$ | $-10, 0$ | $-10, -10$ |

V rozšířeném Vězňově dilematu nemáme žádnou dominantní strategii, a tedy ani žádnou rovnováhu v dominantních strategiích. To právě kvůli té dodané akci „sebevražda". Ta je ale pro oba hráče silně dominovaná. Racionální hráč by v této situaci neměl nikdy volit akci „sebevražda". Protože uvažujeme, že oba vězni jsou racionální, vyloučíme tuto akci z jejich množin akcí $S_1$ a $S_2$:

$$S_1 = \{\text{přiznat}, \text{zapírat}, \cancel{\text{sebevražda}}\}$$
$$S_2 = \{\text{přiznat}, \text{zapírat}, \cancel{\text{sebevražda}}.\}$$

Touto eliminací dostáváme opět klasické Vězňovo dilema, ve kterém existuje rovnováha v dominantních strategiích. Můžeme ale pokračovat v odstraňování dominovaných strategií. Nyní je pro oba vězně dominovaná akce „zapírat". Všimněme si, že tato akce nebyla dominovaná předtím, než jsme vyloučili akce „sebevražda". Vyloučíme tedy akci „zapírat" z množin akcí $S_1$ a $S_2$:

$$S_1 = \{\text{přiznat}, \cancel{\text{zapírat}}, \cancel{\text{sebevražda}}\}$$
$$S_2 = \{\text{přiznat}, \cancel{\text{zapírat}}, \cancel{\text{sebevražda}}.\}$$

Takto nám zbude triviální hra, ve které mají oba hráči na výběr jen jednu akci.

Proces eliminace, kterou jsme si právě předvedli, se nazývá *eliminace silně dominovaných strategií*. Nyní si tento proces uvedeme formálně. Pro zjednodušení uvažujeme jen případ, že všechny množiny $S_i$ jsou konečné.

**Krok 0**: Definujeme pro každého hráče $i \in \mathcal{I}$ iniciální množinu akcí $S_i^0 = S_i$.

**Krok 1**: Definujeme pro každého hráče $i \in \mathcal{I}$ množinu akcí $S_i^1$, která vznikne odstraněním silně dominovaných strategií z $S_i^0$.

$$S_i^1 = \{\, s_i \in S_i^0 \mid \nexists s'_i \in S_i^0 \text{ tak, že } u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \;\; \forall s_{-i} \in S_{-i}^0 \}\,.$$

...

**Krok $k$**: Definujeme pro každého hráče $i \in \mathcal{I}$ množinu akcí $S_i^k$, která vznikne odstraněním silně dominovaných strategií z $S_i^{k-1}$.

$$S_i^k = \{\, s_i \in S_i^{k-1} \mid \nexists s'_i \in S_i^{k-1} \text{ tak, že } u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \;\; \forall s_{-i} \in S_{-i}^{k-1} \,\}\,.$$

Po konečném počtu kroků nastane, že pro všechny hráče $i \in \mathcal{I}$ platí $S_i^{k-1} = S_i^k$. Tedy $k$-tém kroku procesu eliminace nedošlo k odstranění žádných strategií. V tom okamžiku proces ukončíme.

V rozšířeném Vězňově dilematu i v soutěži Odhadni 2/3 průměru jsme eliminací dominovaných strategií dospěli k unikátnímu výstupu. Ve Vězňově dilematu to byl profil strategií (přiznat, přiznat). V soutěži Odhadni 2/3 průměru (pro $I$ hráčů) to byl profil

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{I\text{-krát}}).$$

Pro každého hráče je množina $S_i^\infty$ jednoprvková. V takových případech mluvíme o hrách *řešitelných eliminací dominovaných strategií.*

Uveďme si nyní dva příklady her, které nejsou řešitelné eliminací dominovaných strategií.

*Příklad* 4 (Vysoká čísla). Uvažujme hru, ve které dva hráči volí libovolné přirozené číslo. Poté každý hráč získá tolik bodů, jaké číslo řekl. V takové hře je libovolná volba čísla dominována volbou čísla, které je o jedna vyšší. Pokud bychom eliminovali všechny dominované strategie, zůstaly by množiny akcí prázdné.

*Příklad* 5 (Manželský spor). V této hře bude výplata představovat číselné vyjádření spokojenosti. Hráči jsou manželé, kteří chtějí společně navštívit koncert. Nemohou se ale dohodnout, na který koncert půjdou. Muž má raději Bacha a žena zase Stravinského. Pokud se neshodnou, jejich výplata (spokojenost) je 0. Pokud se shodnou, získává ten z manželů, který navštíví koncert svého oblíbence, výplatu 2 a výplata druhého z manželů je 1. Viz výplatní matici níže.

| muž \ žena | B | S |
|---|---|---|
| B | $2, 1$ | $0, 0$ |
| S | $0, 0$ | $1, 2$ |

V této hře nejsou žádné dominované strategie. Eliminací dominovaných strategií tedy nemůžeme žádné akce vyloučit.

## 5 Nashova rovnováha v ryzích strategiích

V této části si představíme základní koncept řešení z celé teorie her – Nashovu rovnováhu. Nashova rovnováha v ryzích strategiích je takový profil ryzích strategií, že pro žádného hráče není přínosné odchýlit se od něj.

**Definice 3** (Nashova rovnováha)**.** *Nashova rovnováha v ryzích strategiích* hry v normálním tvaru $\langle \mathcal{I}, (S_i)_{i\in\mathcal{I}}, (u_i)_{i\in\mathcal{I}}\rangle$ je profil (ryzích) strategií $s^* \in S$ tak, že pro všechny hráče $i \in \mathcal{I}$ platí

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{pro všechna } s_i \in S_i.$$

Tato definice se může zdát podobná definici dominantní strategie, ale je zde důležitý rozdíl. U Nashovy rovnováhy vyžadujeme pouze to, aby strategie jednotlivých hráčů byly nejlepší proti akcím ostatních hráčů, které jsou zahrnuty v Nashově rovnováze, tedy ne nutně proti všem možným akcím ostatních hráčů.

*Příklad* 6 (Nashova rovnováha ve Vězňově dilematu). Ve Vězňově dilematu je Nashovou rovnováhou profil akcí (přiznat, přiznat). Toto platí obecně. Jestliže má hra rovnováhu v dominantních strategiích, pak je to také unikátní Nashova rovnováha.

*Příklad* 7 (Nashova rovnováha v Manželském sporu). V Manželském sporu jsou dvě Nashovy rovnováhy v ryzích strategiích. Jsou to profily (Bach, Bach) a (Stravinskij, Stravinskij). Zjevně, pokud se jeden z manželů odchýlí od Nashovy rovnováhy, půjde každý z nich na jiný koncert a získají tak výplatu 0.

| | | žena | |
|---|---|---|---|
| | | B | S |
| muž | B | $\boxed{2, 1}$ | $0, 0$ |
| | S | $0, 0$ | $\boxed{1, 2}$ |

Nyní si ukážeme ještě jeden pohled na Nashovu rovnováhu. K tomu budeme potřebovat pojem nejlepší odpověď. Nejlepší odpověď na profil strategií $s_{-i}^*$ je strategie, která zajistí nejvyšší výplatu v případě, že ostatní hráči budou hrát strategie z profilu $s_{-i}^*$. Formálně zavedeme tento pojem takto:

**Definice 4.** O strategii $b_i$ hráče $i$ říkáme, že je to *nejlepší odpověď* na profil strategií $s_{-i}$ ostatních hráčů, pokud platí

$$u_i(b_i, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Množinu všech nejlepších odpovědí na profil strategií $s_{-i}$ ostatních hráčů budeme značit $B(s_{-i})$.

*Příklad* 8. (Nejlepší odpovědi ve Vězňově dilematu a v Manželském sporu) Ve Vězňově dilematu je strategie přiznat nejlepší odpovědí vězně 1 na strategii přiznat i na akci zapírat vězně 2. V Manželském sporu je strategie Bach muže nejlepší odpovědí na strategii Bach ženy a strategie Stravinskij muže je nejlepší odpovědí na strategii Stravinskij ženy.

**Úkol 1** *5 bodů*

Kolik nejlepších odpovědí má vězeň 1 na akci sebevražda vězně 2 v rozšířeném Vězňově dilematu? Vypište je.

Pomocí pojmu nejlepší odpovědi můžeme uvést alternativní charakterizaci Nashovy rovnováhy.

**Věta 5.** *Profil strategií $s^*$ je Nashova rovnováha, právě když*

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*) \quad \textit{pro všechna } i \in \mathcal{I}.$$

Slovy, profil strategií je Nashova rovnováha, právě když každá strategie v něm je nejlepší odpověď na zbylé strategie v něm.

**Úkol 2** *5 bodů*

Najděte všechny Nashovy rovnováhy v ryzích strategiích ve hře o dvou hráčích, která je dána touto výplatní maticí:

| | | hráč 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| hráč 1 | X | $1, 0$ | $-2, -1$ | $0, 1$ |
| | Y | $1, 2$ | $-5, -1$ | $0, 0$ |

## 6 Další příklady

Dále si ukážeme dva komplexnější modelové příklady a Nashovy rovnováhy v nich. Analýza druhého z nich je v podobě úkolů nechána na čtenáři.

### *Cournotův model duopolu*

Dvě firmy (hráči) produkují stejnorodé zboží. Akce hráče $i$ je volba množství, které vyprodukuje:

$$S_i = [0, \infty).$$

Výplata hráčů je rovna rozdílu zisku z prodeje a výrobní ceny:

$$u_i(s_1, s_2) = s_i \cdot p(s_1 + s_2) - c \cdot s_i, \tag{1}$$

kde $p$ je funkce určující tržní cenu. Tržní cena je závislá na celkovém vyprodukovaném množství $q = s_1 + s_2$ a odráží skutečnost, že čím větší množství produktu na trh dodají, tím nižší bude jeho cena. Hodnota $c$ v (1) je jednotková výrobní cena (stejná pro obě firmy). My budeme pro jednoduchost uvažovat $c = 1$ a $p(q) = \max\{0, 2 - q\}$.

K určení Nashovy rovnováhy v této hře použijeme Větu 5; budeme ji tedy hledat jako profil, ve kterém oba hráči vzájemně volí nejlepší odpověď na strategii druhého hráče. V tomto případě existuje na každou strategii právě jedna nejlepší odpověď; navíc hráči jsou v symetrické situaci. Můžeme uvažovat funkci $B_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$, která každé strategii $s_2$ hráče 2 přiřazuje nejlepší odpověď $B_1(s_2)$ pro hráče 1.

Nyní se podíváme, jak tato funkce vypadá. Nejdříve si všimněme, že pokud některá z firem vyprodukuje množství $s_i > 1$, bude tržní cena $p(q) < 1$, tedy nižší než výrobní cena $c = 1$. Firma tedy bude ve ztrátě. Bylo by pro ni lepší nevyrábět nic. V terminologii teorie her bychom řekli, že každá strategie $s_i > 1$ je silně dominovaná strategií $s_i = 0$. Když eliminujeme strategie mimo interval $[0, 1]$ můžeme výplatní funkci zjednodušit takto:

$$\begin{aligned} u_1(s_1, s_2) &= s_1 \cdot (2 - (s_1 + s_2)) - s_1 \\ &= s_1 - s_1^2 - s_1 s_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Uvažme, že druhý hráč zvolil strategii $s_2$ a první hráč na ni hledá nejlepší odpověď. Pevným zvolením $s_2$ v (2) dostaneme funkci jedné proměnné $u_1(s_1) = s_1 - s_1^2 - s_1 s_2$. Vyšetřením průběhu této funkce můžeme zjistit, že nabývá maxima v bodě

$$s_1 = \frac{1 - s_2}{2}.$$

A to je tedy nejlepší odpověď na $s_2$. Dostáváme tedy

$$B_1(s_2) = \frac{1 - s_2}{2}.$$

Analogicky můžeme ukázat, že funkcí $B_2$ nejlepších odpovědí hráče 2 je

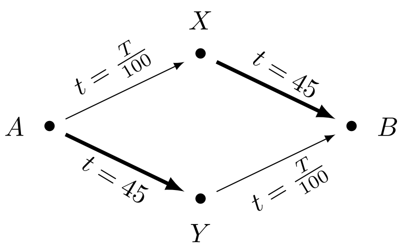
$$B_2(s_1) = \frac{1 - s_1}{2}.$$

Řešení rovnic $B_1(B_2(s_1)) = s_1$ a $B_2(B_1(s_2)) = s_2$, nám dá $s_1 = \frac{1}{3}$ a $s_2 = \frac{1}{3}$. Toto je tedy hledaná Nashova rovnováha v ryzích strategiích.

*Dopravní paradox*

Uvažme následující dopravní situaci. Čtyři tisíce řidičů jedou z bodu $A$ do bodu $B$. Mají přitom dvě možnosti, jak zvolit trasu – buď pojedou přes bod $X$ nebo přes bod $Y$. Na obou trasách jsou dva druhy cest:

- široké cesty (vyznačené silnými šipkami na obrázku), které řidiči projedou vždy za 45 minut nezávisle na tom, kolik jich tam jede.
- úzké cesty (vyznačené tenkými šipkami na obrázku), na kterých se tvoří kolony a čím víc řidičů tam jede, tím déle jejích projetí trvá; pro jednoduchost budeme uvažovat že řidiči projedou cestu za $T/100$ minut, kde $T$ je počet řidičů, kteří po ní jedou.



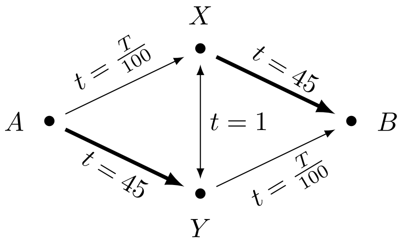

Například, pokud 3000 řidičů pojede přes $X$ a 1000 řidičů pojede přes $Y$, bude cestujícím přes $X$ trvat cesta $3000/100 + 45 = 75$ minut a cestujícím přes $Y$ trvat cesta $45 + 1000/100 = 55$ minut.

**Úkol 3** *10 bodů*

Ukažte, že libovolný profil strategií, ve kterém 2000 řidičů pojede přes $X$ a 2000 řidičů pojede přes $Y$, je Nashova rovnováha v ryzích strategiích.

Každý řidič chce strávit co nejkratší čas na cestě; výplatou v této hře tedy bude opačná hodnota času, který cesta trvala (v minutách).

Nyní uvažme, že se někdo pokusí vylepšit dopravní síť tak, že postaví spojku, díky které lze během jedné minuty přejet mezi body $X$ a $Y$. Situace pak vypadá tak, jak je zobrazena na obrázku níže.




Nyní mají řidiči čtyři možnosti jak zvolit trasu:

$$A \to X \to B, \qquad A \to X \to Y \to B,$$
$$A \to Y \to B, \qquad A \to Y \to X \to B.$$

**Úkol 4** *5 bodů*

Ukažte, že profily strategií, ve kterém 2000 řidičů pojede přes $X$ a 2000 řidičů pojede přes $Y$, po vylepšení dopravní sítě nejsou Nashovy rovnováhy.

Dovysvětlení tohoto příkladu a jeho významu nalezne čtenář v řešeních úkolů.

## 7 Na závěr

Představili jsme si hry v normálním tvaru a základní koncepty jejich řešení. V příštím díle se budeme věnovat smíšeným strategiím v hrách v normálním tvaru, ve kterých hráči náhodně volí mezi možnými akcemi. Pokud se chce čtenář o probíraném tématu dovědět více, doporučujeme například přístupným způsobem psané knihy [1, 2, 3, 4].

## Literatura

[1] Avinash K. Dixit and Barry J. Nalebuff (2010) The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business and Life.

[2] Joseph E. Harrington, Jr. (2010) Games, Strategies, and Decision Making, Worth Publishing.

[3] Martin J. Osborne (2003) An Introduction to Game Theory.

[4] Joel Watson (2007) Strategy: An Introduction to Game Theory.