Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!

Dostává se Ti do rukou zadání matematického korespondenčního semináře PraSe. PraSe je celoroční soutěž pro všechny středoškoláky, které baví matematika. Zájemci od nás během roku dostávají zadání úloh, jejichž řešení nám můžou elektronicky či poštou posílat. My je pak opravujeme a zasíláme zpět spolu se vzorovými řešeními, výsledkovou listinou a novými zadáními.

Účast v semináři s sebou nese celou řadu pozitiv. Řešení zajímavých úloh je v prvé řadě skvělá zábava a ideální způsob, jak si ukrátit dlouhou chvíli. Navíc je to dobrá příprava pro účast v matematických soutěžích, příležitost procvičit si logické myšlení, a dokonce možnost, jak si nechat prominout přijímací zkoušky na Matematicko–fyzikální fakultu Univerzity Karlovy. Nejúspěšnější řešitelé mají možnost jet na týdenní soustředění, které je plné zajímavých her, matematiky a zábavy.

Ať už se rozhodneš do našeho semináře zapojit, nebo ne, můžeš si zkusit vyřešit úlohy v tomto letáku. Doufáme, že se Ti budou líbit. Více informací o našem semináři a o tom, jak začít řešit, najdeš na webových stránkách *www.prase.cz.*

Hodně zdaru přejí

organizátoři

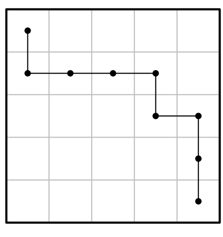
Umění

1. podzimní série — Termín odeslání: 4. října 2021

Kontakt:
https://prase.cz
info@prase.cz

Úloha 1. (3 body)

Pavel chce namalovat obraz do tabulky $n \times n$. Každý tah štětcem začíná v levém horním rohovém políčku a následně může pokračovat do dalších políček, štětec se přitom vždy musí posouvat z jednoho políčka do sousedního směrem doprava nebo dolů. Štětec zabarví každé políčko, přes které přejede. Kolik nejméně tahů štětcem musí Pavel provést, aby zabarvil celou tabulku?



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Verča si črtá do skicáře. Nejprve načrtla čtverec $ABCD$ s bodem E ležícím na jeho úhlopříčce AC tak, že $|AE| > |EC|$. Na jeho straně AB potom nakreslila bod F různý od B tak, aby platilo $|EF| = |DE|$. Dokažte, že $\sphericalangle DEF$ je pravý úhel.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Terka zakopla s plechovkou barvy, čímž do 2021 různých bodů na dosud čistém plátně dopadla kapka barvy. Mohlo se stát, že těžištěm každých 41 kapek je opět nějaká kapka? Uvažujme, že kapky jsou body a mají všechny stejnou hmotnost.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Dominik rád kreslí kuželosečky. Zvolí reálná čísla a, b, pro něž parabola $y = x^2 + ax + b$ protíná osy x a y dohromady ve třech různých bodech. Poté nakreslí kružnici, na níž tyto tři body leží. Dokažte, že tato kružnice prochází pevným bodem nezávislým na a, b.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Martin vyplňuje nekonečný čtverečkovaný papír kladnými celými čísly. Chtěl by to provést tak, aby každý čtvereček s číslem k měl mezi svými osmi sousedy přesně k čtverečků, které jsou taktéž vyplněny číslem k. Kolik nejvýše různých čísel může Martin použít?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Danil chce nakoupit n plechovek barvy o celkové hmotnosti $2^n - 1$ kilogramů. Pokud budou jednotlivé plechovky mít kladné reálné hmotnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kilogramů, zaplatí za ně v rámci slevové akce jen

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + a_1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}$$

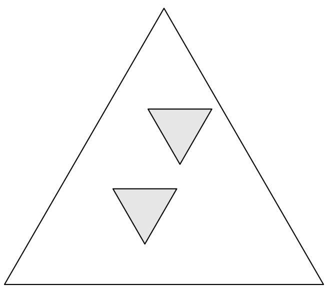
korun. Kolik nejméně může zaplatit, pokud si rozdělení barvy mezi jednotlivé plechovky může zvolit libovolně?

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Archeolog Michal objevil jeskynní malbu pravěkých neandrtálců. Zobrazuje trojúhelník ABC, v němž je M střed strany AC a platí $|\sphericalangle CBM| = 2|\sphericalangle ABM|$. Dále je zobrazen vnitřní bod K úsečky BM splňující $|CM| = |CK|$. Dokažte, že $|MK| = |BC|$.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Lenka tvoří moderní umění. Nejprve si načrtne rovnostranný trojúhelník Δ o straně délky $L > 0$ orientovaný špičkou nahoru. Dovnitř trojúhelníku Δ potom nakreslí n rovnostranných trojúhelníčků se stranami délky 1 orientovaných špičkou dolů, z nichž žádné dva se nepřekrývají[1]. Obrázek ukazuje příklad Lenčina výtvoru s $n = 2$.



Dokažte, že ať už bude Lenka kreslit jakkoliv, bude platit $n \leq \frac{2}{3}L^2$.

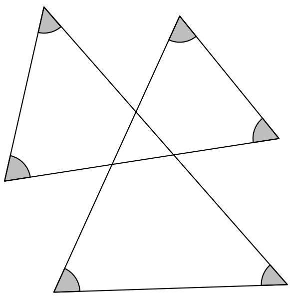
[1] Můžou se však dotýkat stranami.

Porovnávání

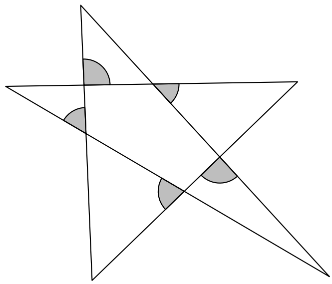
2. podzimní série Termín odeslání: 8. listopadu 2021

Úloha 1. (3 body)

Rozhodněte a zdůvodněte, zda je součet vyznačených úhlů větší v obrázku a), či v obrázku b).



a)



b)

Úloha 2. (3 body)

Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Porovnejte $\sqrt{n}$ a

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Úloha 3. (3 body)

Pravoúhlý trojúhelník má přeponu délky c a poloměr kružnice vepsané r. Dokažte, že $c > 4r$.

Úloha 4. (5 bodů)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC je M střed přepony AB. Zvolíme bod P na úsečce AM a bod Q na úsečce MB tak, že $|PQ| = |CQ|$. Dokažte, že platí $|AP| \leq 2 \cdot |MQ|$.

Úloha 5. (5 bodů)

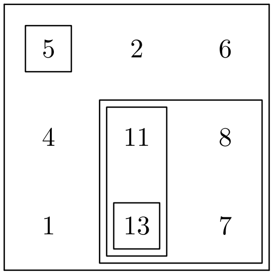
Je dáno přirozené číslo m a taková k-tice přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nepřevyšujících m, že každé z čísel $1, 2, \ldots, m$ je dělitelné nanejvýš jedním a_i pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k} \leq \frac{3}{2}.$$

Úloha 6. (5 bodů)

PraSestán je tvořen tabulkou s $m \times n$ políčky, na každém z nichž se pase nějaké množství prasat. *Pohraničím* obdélníkové oblasti O tvořené políčky tabulky rozumíme množinu těch políček, která neleží v O, ale která s některým políčkem v O sousedí stranou. Obdélníková oblast O je *bohatá*, pokud se na každém políčku v O pase více prasat než na každém políčku v pohraničí O, které s ním sdílí sloupec či řádek (nemusí však nutně sousedit). Kolik nejvíce bohatých obdélníkových oblastí se může v PraSestánu nacházet, pokud smíme libovolně upravit počty prasat na jednotlivých políčkách?

Například v následující tabulce s počty prasat jsou bohatými právě všechny zvýrazněné obdélníkové oblasti (včetně celého PraSestánu):



Úloha 7. (5 bodů)

Jsou dána kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a, c > 1$ a $b, d < 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

Úloha 8. (5 bodů)

U kulatého stolu je na židlích rozesazeno n reálných čísel. Židli $ž$ nazveme *dobrou*, pokud má nějaká skupinka po sobě jdoucích židlí začínající od $ž$ a pokračující po směru hodinových ručiček nezáporný součet svých čísel. Dokažte, že součet čísel na dobrých židlích je nezáporný.

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *https://prase.cz/*
e-mail: *info@prase.cz*